

2 De afgeleide functie

Voorkennis Snelheid

Bladzijde 53

- 1 18 minuten + 37 minuten = 55 minuten
 37 seconden + 36 seconden = 73 seconden, oftewel 1 minuut en 13 seconden
 Ramon deed 5 uur, 56 minuten en 13 seconden over de etappe.
 Dat is $5 + \frac{56}{60} + \frac{13}{3600} = 5,9369...$ uur.

De gemiddelde snelheid is $\frac{175,5}{5,9369...} \approx 29,56$ km/uur.

Dat is $\frac{29,56...}{3,6} \approx 8,21$ m/s.

- 2 a De beklimming van 25 km in $1 + \frac{12}{60} = 1,2$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{25}{1,2} \approx 21$ km/uur.
 De afdaling van 19 km in $\frac{17}{60} = 0,2833...$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{19}{0,2833...} \approx 67$ km/uur.
 b De $25 + 19 = 44$ km van de beklimming en de afdaling samen in $1,2 + 0,2833... = 1,4833...$ uur
 geeft gemiddelde snelheid = $\frac{44}{1,4833...} \approx 30$ km/uur.

Bladzijde 54

- 3 a Bij elk van de drie gedeelten van de tocht neemt de afstand lineair toe in de tijd, dus bij elk van de drie gedeelten van de tocht is met een constante snelheid gereden.
 b 12 km in $\frac{35}{60} = 0,5833...$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{12}{0,5833...} \approx 20,57$ km/uur.
 $23 - 12 = 11$ km in $\frac{58 - 35}{60} = 0,3833...$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{11}{0,3833...} \approx 28,70$ km/uur.
 $27 - 23 = 4$ km in $\frac{75 - 58}{60} = 0,2833...$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{4}{0,2833...} \approx 14,12$ km/uur.
 c 27 km in $\frac{75}{60} = 1,25$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{27}{1,25} = 21,6$ km/uur.
 Dat is $\frac{21,6}{3,6} = 6$ m/s.
- 4 a De afstand neemt niet lineair toe in de tijd, dus er is niet met een constante snelheid gereden.
 b 35 km in $\frac{85}{60} = 1,4166...$ uur geeft gemiddelde snelheid = $\frac{35}{1,4166...} \approx 24,71$ km/uur.
 c Aan het begin van de tocht heeft de wielrenner een snelheid die hoger is dan de gemiddelde snelheid. Gedurende de tocht neemt zijn snelheid af. Op het eind van de tocht is zijn snelheid lager dan de gemiddelde snelheid. Dus er zal een tijdstip zijn waarop de snelheid van de wielrenner gelijk is aan zijn gemiddelde snelheid.

2.1 Snelheden

Bladzijde 55

- 1 Tussen A en C neemt de daling steeds meer toe, tussen C en B neemt de daling steeds meer af.
- 2 Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 1, 2 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 2, 3 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

Bladzijde 56

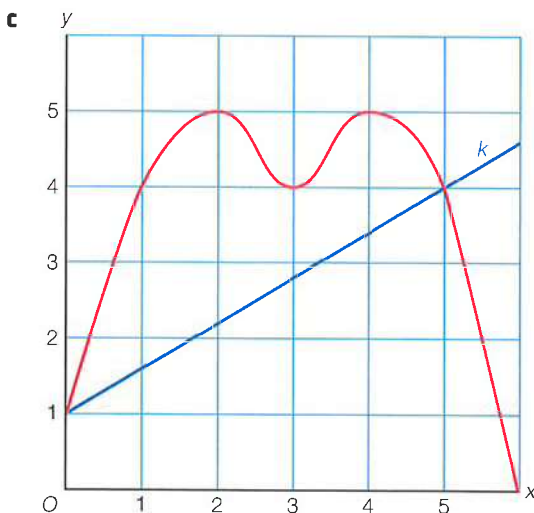
- 3** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, -4 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle -4, -2 \rangle$ en op $\langle 5, \rightarrow \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle -2, 1 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 1, 3 \rangle$.
- 4** **a** Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
b Bij de steilste klim is de snelheid het laagst. Dus na 7 minuten.
- 5** De gevraagde gemiddelde snelheid is $\frac{90}{5} = 18$ m/s.

Bladzijde 57

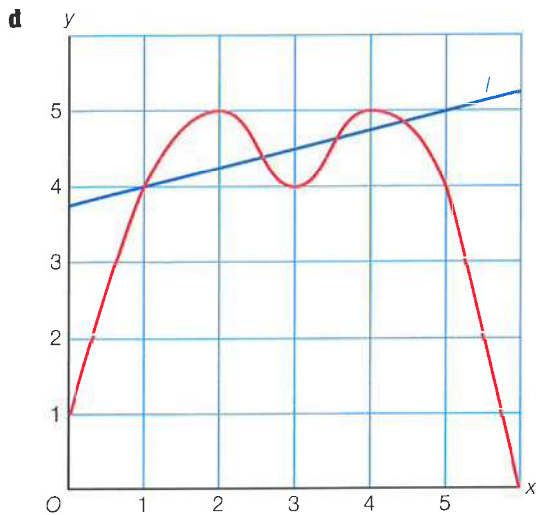
- 6** **a** Op $[20, 40]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12,5 - 5}{40 - 20} = \frac{7,5}{20} = 0,375$ km/minuut.
 De gevraagde gemiddelde snelheid is $0,375 \cdot 60 = 22,5$ km/uur.
 Op $[30, 60]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15 - 10}{60 - 30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ km/minuut.
 De gevraagde gemiddelde snelheid is $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ km/uur.
b De grafiek is niet overal even steil.
c Teken de lijn door de punten $(0, 0)$ en $(20, 5)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(60, 15)$.
 Dus voor $p = 60$.
- 7** De gemiddelde snelheid op $[0, t]$ wordt steeds kleiner als je t steeds groter neemt.

Bladzijde 58

- 8** **a** De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$.
b Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{6 - 2} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$.



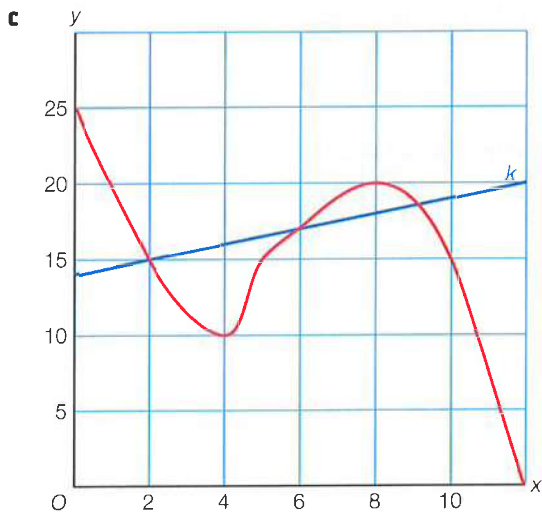
De lijn k door $(0, 1)$ met $rc_k = 0,6$ snijdt de grafiek in het punt $(5, 4)$.
 Dus voor $p = 5$.



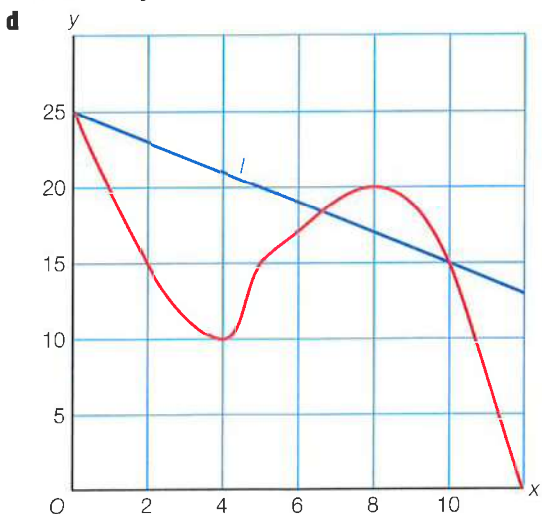
De lijn l door $(1, 4)$ met $rc_l = \frac{1}{4}$ snijdt de grafiek rechts van $x = 1$ in drie punten.
Dus er zijn drie waarden van q waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

9 a De gemiddelde verandering op $[2, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 15}{8 - 2} = \frac{5}{6}$.

b Op $[4, 12]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 10}{12 - 4} = \frac{-10}{8} = -1\frac{1}{4}$.



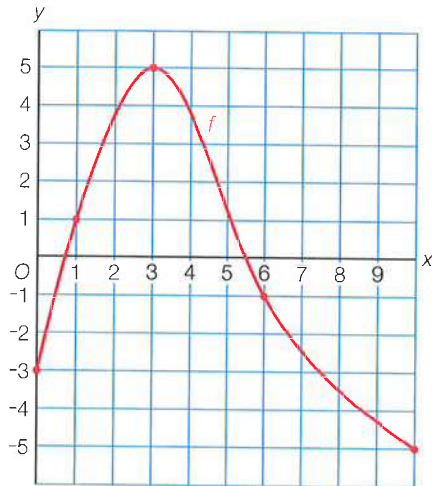
De lijn k door $(2, 15)$ met $rc_k = 0,5$ snijdt de grafiek rechts van $x = 2$ in twee punten.
Dus er zijn twee waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van y op $[2, p]$ gelijk is aan $0,5$.



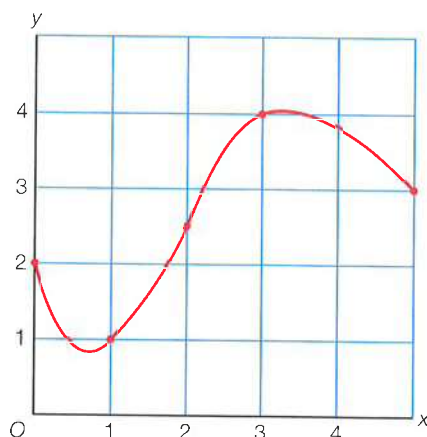
De lijn l door $(0, 25)$ met $rc_l = -1$ snijdt de grafiek bij $x = 6,5$ en bij $x = 10$.
Dus voor $q = 6,5$ en voor $q = 10$ is het differentiequotiënt van y op $[0, q]$ gelijk aan -1 .

Bladzijde 59**10** $f(0) = -3$ Op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$, dus $f(1) = -3 + 4 = 1$.Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, dus $f(3) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$.Op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$, dus $f(6) = 5 + 3 \cdot -2 = -1$ Op $[6, 10]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, dus $f(10) = -1 + 4 \cdot -1 = -5$

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.

Elke grafiek die door de punten $(0, -3)$, $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(6, -1)$ en $(10, -5)$ gaat is goed.**11 a** Door $(0, 2)$.Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.

**b** Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.**c** Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

- 12 a** $f(1) = -2$ en $f(5) = 6$, dus op de grafiek liggen de punten $(1, -2)$ en $(5, 6)$.
 Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$.
- b** $f(0) = 1$ en $f(4) = 1$, dus op de grafiek liggen de punten $(0, 1)$ en $(4, 1)$.
 Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{4 - 0} = 0$.

Bladzijde 60

- 13 a** Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = -\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } B(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ -1 + b = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 3$.

- b** Op $[-2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{-26 - (-10)}{8} = -2$.

- 14 a** Op $[-1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-2 - 10}{4} = -3$.

- b** Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 0}{3} = \frac{0}{3} = 0$.

- c** Op $[-5, -1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1) - f(-5)}{-1 - (-5)} = \frac{10 - 54}{4} = \frac{-44}{4} = -11$.

- d** Op $[-5, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-5)}{4 - (-5)} = \frac{0 - 54}{9} = \frac{-54}{9} = -6$.

- 15** Bij een lineaire functie is ieder differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn.

- 16 a** Voer in $y_1 = x^3 - 3x + 5$.
 Schets, zie hiernaast.

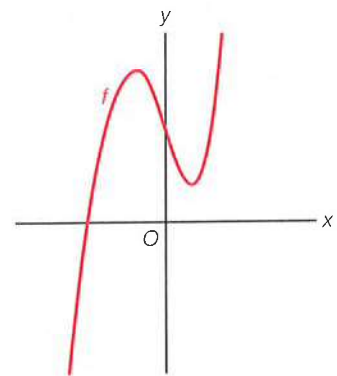
- b** Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$.

- c** Op $[-2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9$.

- d** Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-13)}{4} = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus } B(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $l: y = 4x - 1$.



- 17 a** Op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0,4 - (-7,6)}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

- b** Op $[-2, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{1,4 - 9,4}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

- c** $f(0) = -5$, dus $A(0, -5)$.
 $f(3) = 0,4$, dus $B(3; 0,4)$.

De helling van de lijn AB is $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,4 - (-5)}{3 - 0} = \frac{5,4}{3} = 1,8$.

- d** De helling van de lijn CD is gelijk aan de helling van de lijn $y = 2x$.
 Dus de helling van de lijn CD is 2.

Bladzijde 61

18 a $t = 0$ geeft $h = 276$, dus Berry gooit de steen vanaf een hoogte van 276 meter.

b Voer in $y_1 = -4,9x^2 - 4x + 276$.

Schets, zie hiernaast.

c De optie nulpunt geeft $x = 7,108...$

Dus na 7,1 seconden komt de steen op de grond terecht.

d $t = 2$ geeft $h = 248,4$

$t = 3$ geeft $h = 219,9$

In de derde seconde daalt de steen $248,4 - 219,9 = 28,5$ meter.

e $t = 4$ geeft $h = 181,6$

De gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vier seconden is

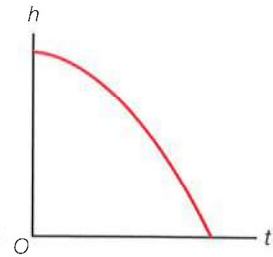
$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{276 - 181,6}{4} = \frac{94,4}{4} = 23,6 \text{ m/s.}$$

f Gebruik het resultaat van vraag c.

$t = 7,108... - 1 = 6,108...$ geeft $h = 68,758...$

De gemiddelde snelheid van de steen gedurende de laatste seconde van de val is

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{68,758...}{1} \approx 68,8 \text{ m/s.}$$



19 Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ en

$$\text{op } [1, 4] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16a + 16 - 3 - (a + 4 - 3)}{3} = \frac{16a + 16 - 3 - a - 4 + 3}{3} = \frac{15a + 12}{3}.$$

$$\text{Dus } \frac{15a + 12}{3} = 2$$

$$15a + 12 = 6$$

$$15a = -6$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

Dit geeft $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 4x - 3$.

Het differentiequotient van $f(x)$ op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3}{5} - 3}{1} = 3\frac{3}{5}$.

20 a De gemiddelde snelheid op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3^3 + 3) - (2^3 + 2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20 \text{ m/s.}$

b De gemiddelde snelheid op $[2; 2,1]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,1^3 + 2,1) - (2^3 + 2)}{2,1 - 2} = \frac{11,361 - 10}{0,1} = 13,61 \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,01^3 + 2,01) - (2^3 + 2)}{2,01 - 2} = \frac{10,130601 - 10}{0,01} = 13,0601 \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,001^3 + 2,001) - (2^3 + 2)}{2,001 - 2} = \frac{10,013006001 - 10}{0,001} = 13,006001 \text{ m/s.}$

c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichtbij 13 m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,0001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,0001^3 + 2,0001) - (2^3 + 2)}{2,0001 - 2} = \frac{10,001300060001 - 10}{0,0001} = 13,00060001 \text{ m/s.}$$

d Dit gaat mis omdat dan de noemer 0 wordt bij $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, en delen door 0 kan niet.

Bladzijde 63

21 Op $[3; 3,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 3,01^2 - 0,4 \cdot 3^2}{0,01} = 2,404$.

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.

Op $[5; 5,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 5,01^2 - 0,4 \cdot 5^2}{0,01} = 4,004$.

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 4,00 m/s.

22 Op $[4; 4,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3,5 \cdot 4,01^2 - 3,5 \cdot 4^2}{0,01} = 28,035$.

De snelheid op $t = 4$ is bij benadering $28,035 \cdot 3,6 = 100,926$ km/uur.
Dus Roel heeft gelijk.

23 Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{1,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{1 + 2}\right)}{0,01} = 0,553\dots$

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering 0,55 m/s.

Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{2,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{2 + 2}\right)}{0,01} = 0,311\dots$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 0,31 m/s.

24 a Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{8,04 + 1} - 10) - (10\sqrt{8 + 1} - 10)}{0,01} = 6,659\dots$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 6,66 m/s.

Op $[20; 20,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{80,04 + 1} - 10) - (10\sqrt{80 + 1} - 10)}{0,01} = 2,221\dots$

De snelheid op $t = 20$ is bij benadering 2,22 m/s.

b Op $[11; 11,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{44,04 + 1} - 10) - (10\sqrt{44 + 1} - 10)}{0,01} = 2,980\dots$

De snelheid op $t = 11$ is bij benadering 2,98 m/s.

Het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en op $t = 20$ is $\frac{6,659\dots + 2,221\dots}{2} = 4,440\dots$

Dit is niet gelijk aan de snelheid op $t = 11$.

25 De gemiddelde snelheid op $[0, 6]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2\right)}{6 - 0} = 18$ m/s.

Benader de snelheid op $t = 0$. Neem bijvoorbeeld $\Delta t = 0,001$.

De snelheid op $t = 0$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot 0,001^3 + 5 \cdot 60,001^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2\right)}{0,001} = 0,004\dots$ m/s.

Benader de snelheid op $t = 6$. Neem bijvoorbeeld $\Delta t = 0,001$.

De snelheid op $t = 6$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot 6,001^3 + 5 \cdot 6,001^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2\right)}{0,001} = 23,99\dots$ m/s.

Op $t = 0$ is de snelheid minder dan de gemiddelde snelheid en op $t = 6$ is de snelheid meer dan de gemiddelde snelheid. Dus moet er op $[0, 6]$ een tijdstip zijn waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

Bladzijde 65

26 a De gemiddelde snelheid op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-5^2 + 10 \cdot 5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-4^2 + 10 \cdot 4) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-3^2 + 10 \cdot 3) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-2,5^2 + 10 \cdot 2,5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,75 - 16}{0,5} = 5,5$ m/s.

b De richtingscoëfficiënt van de lijn AB_4 komt het dichtst in de buurt bij die van k .

Bladzijde 67**27 a** Voer in $y_1 = x^2 + x - 2$.

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(-1) = -2, \text{ dus } A(-1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = -2 \\ 1 + b = -2 \\ b = -3 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -x - 3.$$

b Voer in $y_1 = \frac{2}{x-1} + 3$.

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -0,5.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,5x + b \\ g(3) = 4, \text{ dus } B(3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,5 \cdot 3 + b = 4 \\ -1,5 + b = 4 \\ b = 5,5 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -0,5x + 5,5.$$

28 Voer in $y_1 = 1 + \frac{5x^2}{x^2 + 1}$.

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-2} = -0,8.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,8x + b \\ f(-2) = 5, \text{ dus } A(-2, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,8 \cdot -2 + b = 5 \\ 1,6 + b = 5 \\ b = 3,4 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -0,8x + 3,4.$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2,5.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2,5x + b \\ f(1) = 3,5, \text{ dus } B(1; 3,5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,5 \cdot 1 + b = 3,5 \\ b = 1 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 2,5x + 1.$$

Snijpunt berekenen van $k: y = -0,8x + 3,4$ en $l: y = 2,5x + 1$.

$$-0,8x + 3,4 = 2,5x + 1$$

$$-3,3x = -2,4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0,727... \\ y = 2,5x + 1 \end{array} \right\} y = 2,818...$$

Dus snijpunt $(0,73; 2,82)$.**29** $t = 5$ geeft $s = 1,5 \cdot 5^2 = 37,5$ Voer in $y_1 = 1,5x^2$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=5} = 15, \text{ dus op } t = 5 \text{ is de snelheid } 15 \text{ m/s.}$$

Na 10 seconden heeft de auto $37,5 + (10 - 5) \cdot 15 = 112,5$ meter afgelegd.

30 Voer in $y_1 = \frac{2x+4}{x-1}$ en $y_2 = \sqrt{9x-2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 3$ en $y = 5$.

Zet y_2 uit.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -1,5$.

$$\begin{aligned} y = -1,5x + b \\ S(3, 5) \quad \left. \begin{aligned} -1,5 \cdot 3 + b &= 5 \\ -4,5 + b &= 5 \\ b &= 9,5 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -1,5x + 9,5$.

Zet y_1 uit en y_2 aan.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 0,9$.

$$\begin{aligned} y = 0,9x + b \\ S(3, 5) \quad \left. \begin{aligned} 0,9 \cdot 3 + b &= 5 \\ 2,7 + b &= 5 \\ b &= 2,3 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $l: y = 0,9x + 2,3$.

31 Voer in $y_1 = \frac{600x}{4^x}$.

Op $t = 2$ is er nog $\frac{600 \cdot 2}{4^2} = \frac{1200}{16} = 75$ mg aanwezig.

$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = -66,47\dots$, dus de hoeveelheid neemt vanaf $t = 2$ af met $66,47\dots$ mg/uur.

Het duurt dan nog $\frac{75}{66,47\dots} \approx 1,1$ uur.

Dus op $t \approx 2 + 1,1 = 3,1$.

Bladzijde 69

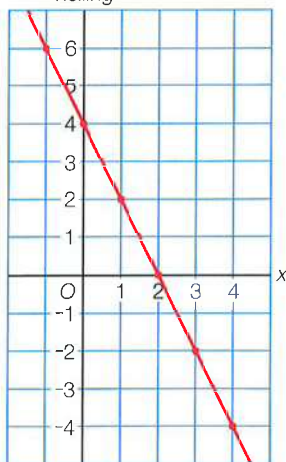
32 a positief
negatief

b In de top T is de helling 0.

c Voer in $y_1 = -x^2 + 4x$ en bereken de hellingen met de optie $\frac{dy}{dx}$.

x -coördinaat	-1	0	1	2	3	4
helling	6	4	2	0	-2	-4

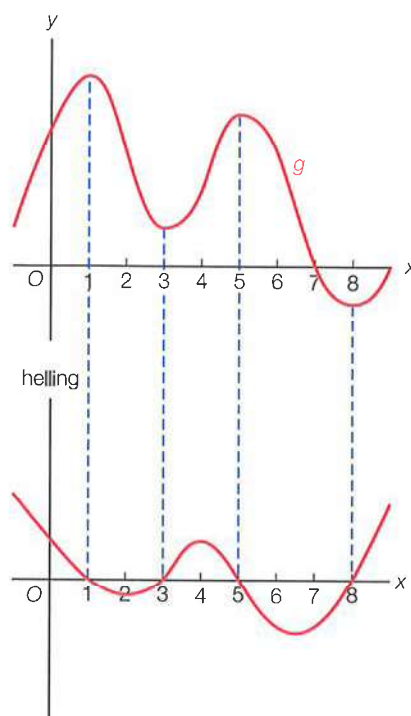
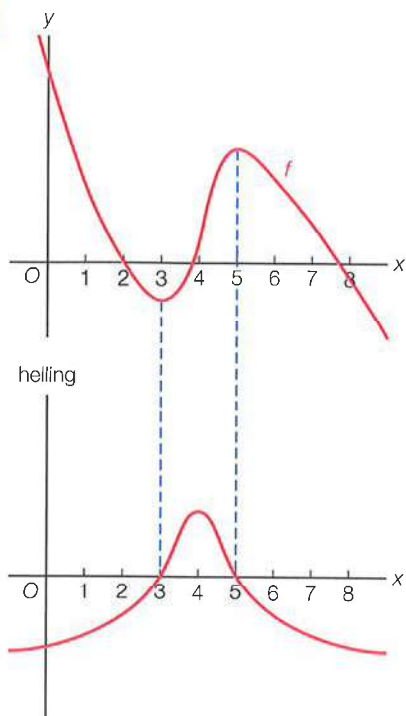
d helling



e De lijn geeft voor elke x de helling van de grafiek van f .

Bladzijde 70

33



Bladzijde 71

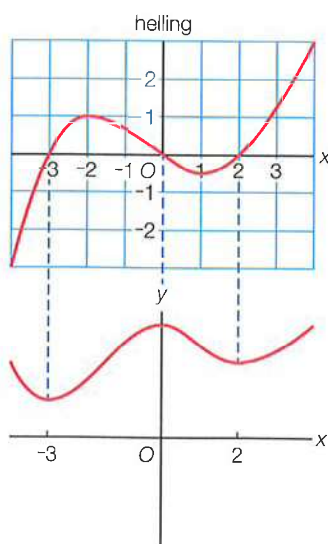
34

- a De hellinggrafiek ligt op het interval $\langle a, b \rangle$ boven de x -as en is daar stijgend.
 b De hellinggrafiek ligt op het interval $\langle c, d \rangle$ onder de x -as en is daar stijgend.
 c De hellinggrafiek gaat dalend door de x -as bij $x = p$.
 d De hellinggrafiek heeft een negatief minimum bij $x = q$.

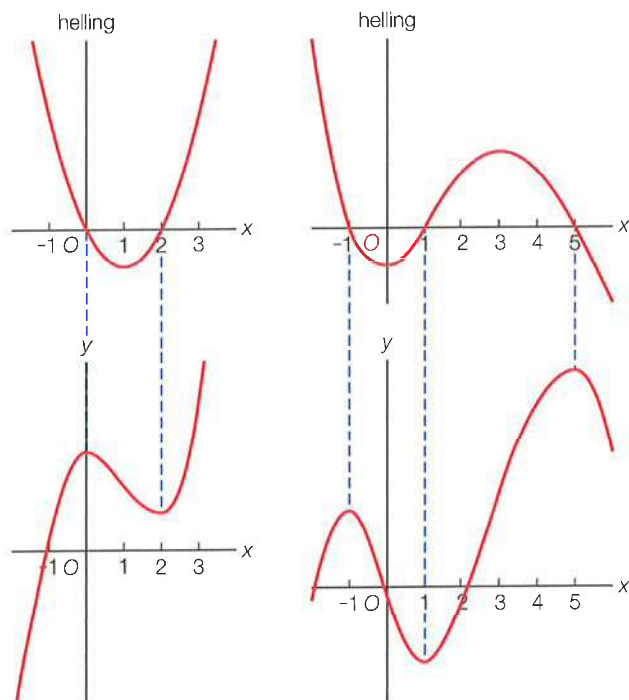
35

	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle \leftarrow, -3 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = -3$	snijdt de x -as	top
$\langle -3, 0 \rangle$	boven de x -as	stijgend
$x = 0$	snijdt de x -as	top
$\langle 0, 2 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = 2$	snijdt de x -as	top
$\langle 2, \rightarrow \rangle$	boven de x -as	stijgend

b



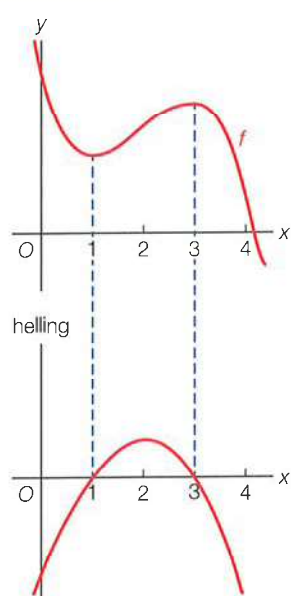
36



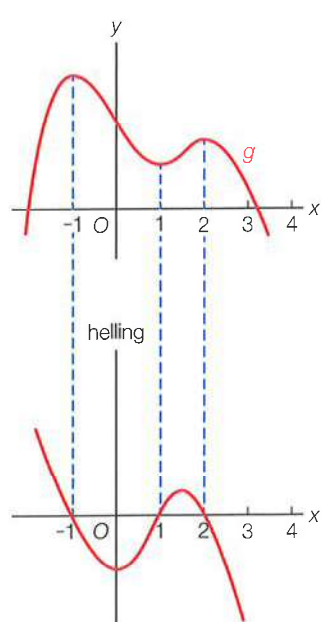
Bladzijde 72

37

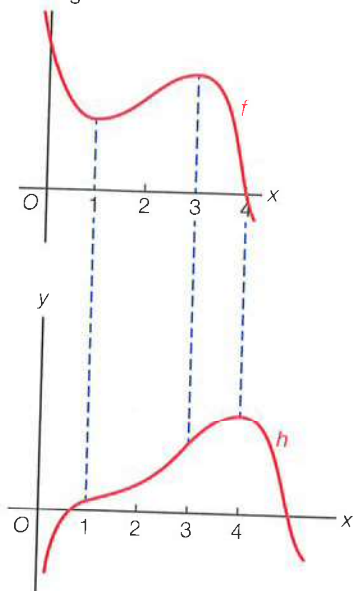
a



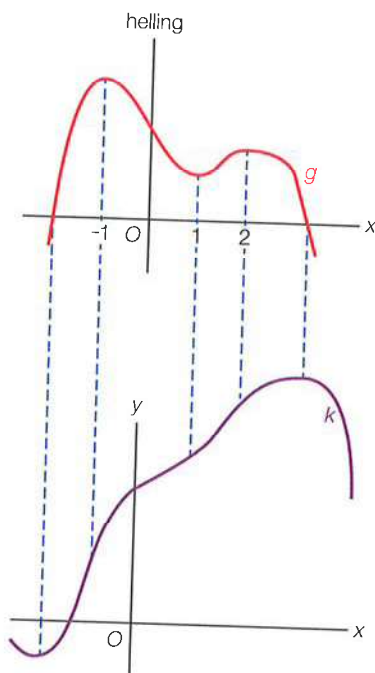
b



c helling

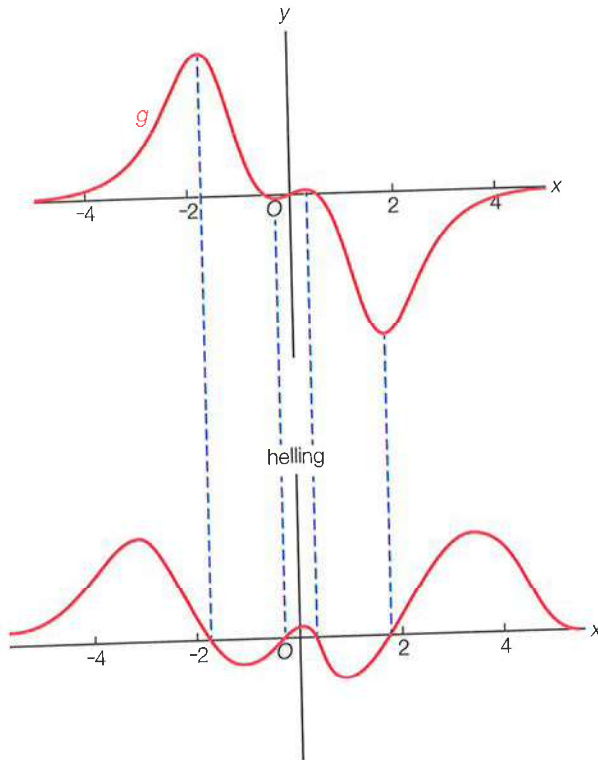


d



- 38 a** De grafiek van g heeft vier toppen.
 De hellinggrafiek van g moet de x -as vier keer snijden.
 Dus de grafiek van f kan niet de hellinggrafiek van g zijn.
 De grafiek van f heeft drie toppen.
 De grafiek van g snijdt de x -as drie keer.
 Dus de grafiek van g is de hellinggrafiek van f .
 Lars heeft gelijk.

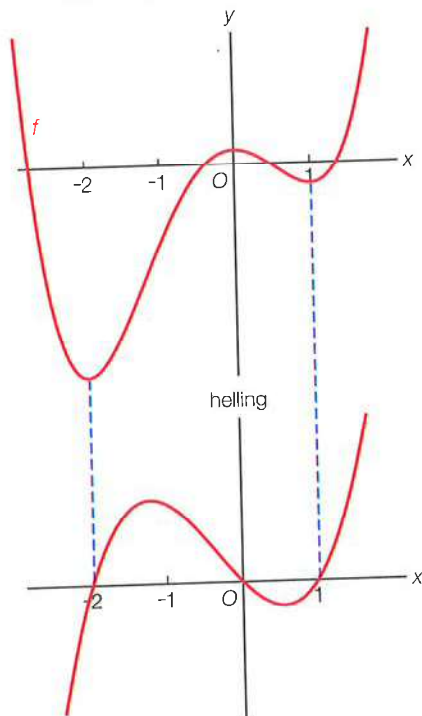
b



39

- a** Voer in $y_1 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$.
 De optie minimum geeft $x = -2$ en $y = -30$ en $x = 1$ en $y = -3$.
 De optie maximum geeft $x = 0$ en $y = 2$.
 De toppen zijn $(-2, -30)$, $(0, 2)$ en $(1, -3)$.

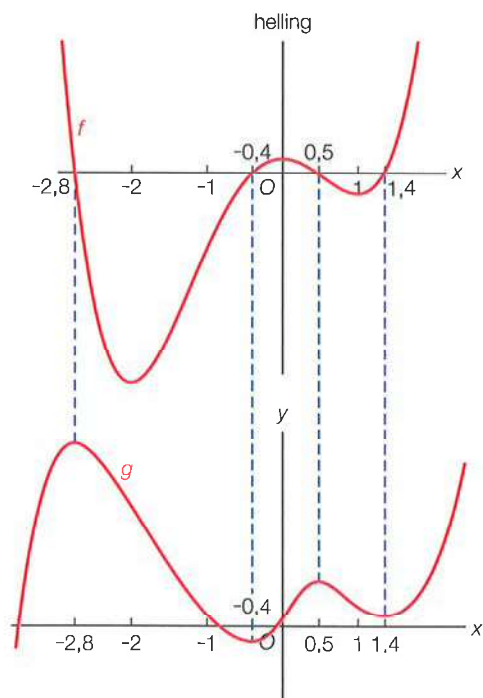
b



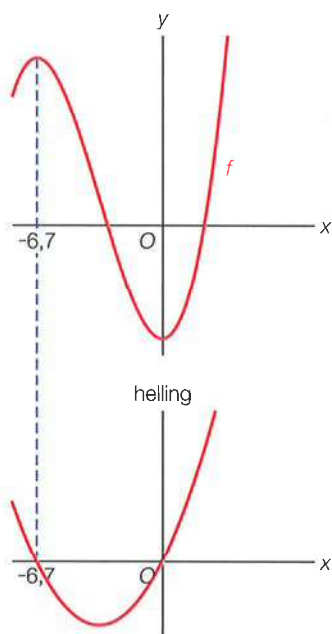
c $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = 24$

- d** De optie nulpunt geeft $x \approx -2,8$, $x \approx -0,4$, $x \approx 0,5$ en $x \approx 1,4$.

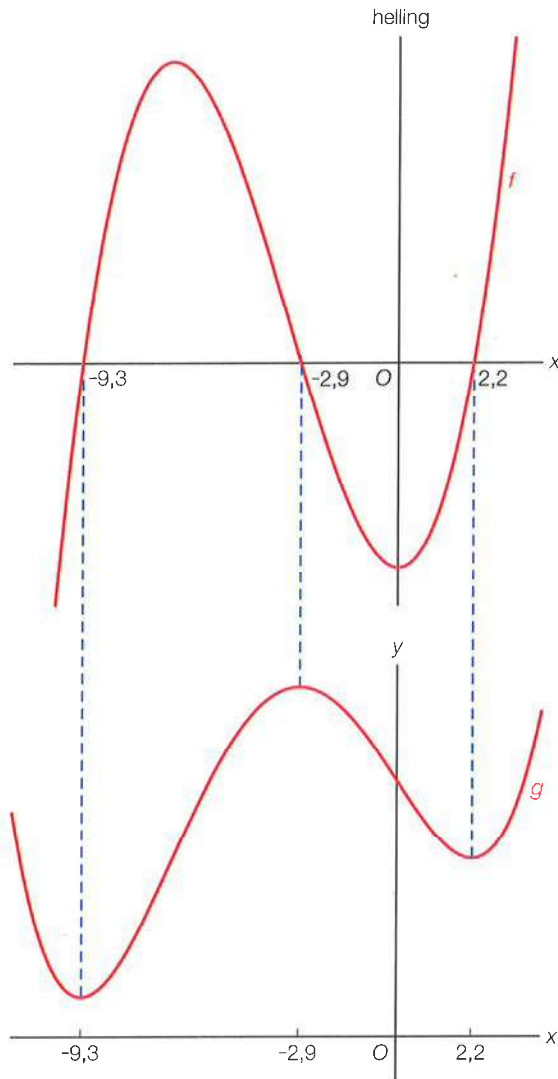
e



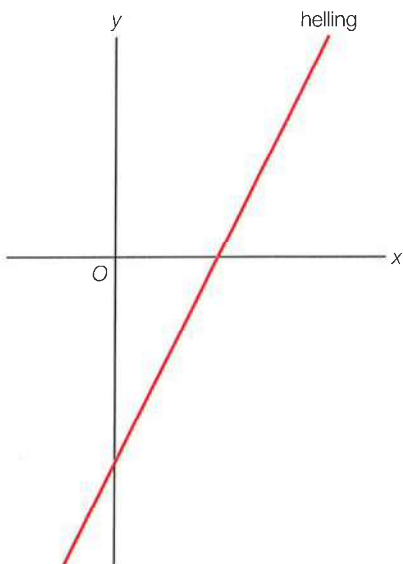
- 40 a Voer in $y_1 = 0,1x^3 + x^2 - 6$.
De optie maximum geeft $x \approx -6,7$ en $y \approx 8,8$.
De optie minimum geeft $x = 0$ en $y = -6$.



- b** De optie nulpunt geeft $x \approx -9,3$, $x \approx -2,9$ en $x \approx 2,2$.



41 a



De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een verticale verschuiving. Dus hebben f en g voor elke waarde van x dezelfde helling. De hellinggrafieken van f en g vallen dus samen.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \text{Stel } h(x) &= x^2 - 4x + c \\ \text{door } A(3, 4) \quad &\left\{ \begin{array}{l} 3^2 - 4 \cdot 3 + c = 4 \\ 9 - 12 + c = 4 \\ c = 7 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $h(x) = x^2 - 4x + 7$.

2.3 Limiet en afgeleide

Bladzijde 74

- 42 a** In elk punt van de grafiek van f is de helling 3, want de grafiek van f is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 3. Dus de hellinggrafiek is de horizontale lijn op hoogte 3. Dus de formule van de hellingfunctie van f is $y = 3$.

b $y = 0$

43 a

x	-2	-1	0	1	2
helling	-4	-2	0	2	4

- b** Bij elke toename van x met 1 hoort een toename van y met 2, dus de hellinggrafiek is een lijn met richtingscoëfficiënt 2.

De hellinggrafiek gaat door het punt $(0, 0)$.

Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = 2x$.

*

Bladzijde 75

- 44 a** Invullen van $h = 0$ in $\frac{3,6h + 0,6h^2}{h}$ geeft dat de noemer gelijk is aan nul.

Delen door nul is niet toegestaan.

b $\lim_{h \rightarrow 0} (3,6 + 0,6h) = 3,6 + 0,6 \cdot 0 = 3,6$

45 a
$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(4+h)^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 4^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(16 + 8h + h^2) - 1\frac{1}{2} \cdot 16}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24 + 12h + 1\frac{1}{2}h^2 - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 1\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 1\frac{1}{2}h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 1\frac{1}{2}h) = 12$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(x+h)^2 - 1\frac{1}{2}x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(x^2 + 2xh + h^2) - 1\frac{1}{2}x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}x^2 + 3xh + 1\frac{1}{2}h^2 - 1\frac{1}{2}x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xh + 1\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x + 1\frac{1}{2}h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x + 1\frac{1}{2}h) = 3x$$

Bladzijde 76

46 a
$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) - (3^2 - 4 \cdot 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 12 - 4h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - (x^2 - 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - x^2 + 4x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 4) = 2x - 4$$

47 a
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (a) = a$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0$$

48 a $(x+h)^3 = (x+h)(x+h)^2 = (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

49 a $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \cdot g'(x)$$

b $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft

$$s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Bladzijde 77

50 a $\left. \begin{array}{l} h(x) = c \cdot f(x) \text{ met } c = 10 \text{ en } f(x) = x^2 \\ f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x) \\ f(x) = x^2 \text{ geeft } f'(x) = 2x \end{array} \right\} h'(x) = c \cdot f'(x) = 10 \cdot 2x = 20x$

b Dit volgt uit de regels

- $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
- $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
- $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
- $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
- $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Bladzijde 78

51 $v(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x) = f(x) + h(x)$ met $h(x) = -1 \cdot g(x)$.

Uit $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ volgt $h'(x) = -1 \cdot g'(x)$.

Uit $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ volgt

$$v'(x) = f'(x) + h'(x) = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Dus de verschilregel $v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ volgt uit de regels

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ en $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

52 a $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$ geeft $f'(x) = 30x^5 - 15x^4 + 2$

b $g(x) = -2x^8 - 4x^4 + 7,2$ geeft $g'(x) = -16x^7 - 16x^3$

c $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ geeft $h'(x) = -x^2 - x - 1$

d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5q^7$ geeft $k'(q) = 3 - 6q - 35q^6$

53 a $f(x) = (5x+7)(4-3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$

b $g(x) = (3x+6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 28$

c $h(x) = 5(x-3)^2 + 5(2x-1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5 = 5x^2 - 20x + 40$ geeft $h'(x) = 10x - 20$

d $k(x) = -3(x-1)(5-9x) - 8(x-7) = -3(5x - 9x^2 - 5 + 9x) - 8x + 56 = -15x + 27x^2 + 15 - 27x - 8x + 56 = 27x^2 - 50x + 71$ geeft $k'(x) = 54x - 50$

- 54 a $f(x) = (3x-1)(x^2+5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
 b $g(x) = (3x^3-1)^2 = 9x^6 - 6x^3 + 1$ geeft $g'(x) = 54x^5 - 18x^2$
 c $h(x) = (5x^5-3)(3x-2) = 15x^6 - 10x^5 - 9x + 6$ geeft $h'(x) = 90x^5 - 50x^4 - 9$
 d $k(x) = 5 - 3(x^4-x)(x+1) = 5 - 3(x^5 + x^4 - x^2 - x) = 5 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x$ geeft
 $k'(x) = -15x^4 - 12x^3 + 6x + 3$
 e $l(t) = (5t^3-t)(3t^5+t) = 15t^8 + 5t^4 - 3t^6 - t^2$ geeft $l'(t) = 120t^7 + 20t^3 - 18t^5 - 2t$
 f $m(q) = 1 - (3q^2-2)^2 = 1 - (9q^4 - 12q^2 + 4) = 1 - 9q^4 + 12q^2 - 4 = -9q^4 + 12q^2 - 3$ geeft
 $m'(q) = -36q^3 + 24q$

Bladzijde 79

- 55 a $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.
 b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -24 + 8 + 1 = -15$
 c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 64$$

$$x = \frac{4+8}{6} = 2 \vee x = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

- 56 $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ geeft $f'(x) = 4ax^3 - 6x + 2a$
 $f'(2) = 5$ geeft $4a \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 2a = 5$
 $32a - 12 + 2a = 5$
 $34a = 17$
 $a = \frac{1}{2}$

- 57 $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3} = \frac{2(2x-1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

- 58 Stel $h(x) = ax^2 + bx + c$, dan is $h'(x) = 2ax + b$.

$$\left. \begin{aligned} h'(x) &= 2ax + b \\ g(x) &= 6x + 12 \end{aligned} \right\} a = 3 \text{ en } b = 12$$

 Dus $h(x) = 3x^2 + 12x + c$.
 $h(-3) = -4$ geeft $3 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot -3 + c = -4$
 $27 - 36 + c = -4$
 $c = 5$
 Dus $h(x) = 3x^2 + 12x + 5$.

2.4 Toepassingen van de afgeleide**Bladzijde 81**

- 59 a $p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x-7) = 3x^3 - 7x^2$ geeft $p'(x) = 9x^2 - 14x$
 $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
 $g(x) = 3x-7$ geeft $g'(x) = 3$
 b $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x$ en $p'(x) = 9x^2 - 14x$, dus $p'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.
 c $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot (3x-7) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 - 14x + 3x^2 = 9x^2 - 14x$
 en $p'(x) = 9x^2 - 14x$, dus $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- 60 a $f(x) = (2-3x^2)(2+7x)$ geeft
 $f'(x) = [2-3x^2]' \cdot (2+7x) + (2-3x^2) \cdot [2+7x]'$
 $= -6x(2+7x) + (2-3x^2) \cdot 7 = 7(2-3x^2) - 6x(2+7x)$
 b $g(x) = (2x-5)^2 = (2x-5)(2x-5)$ geeft
 $g'(x) = [2x-5]' \cdot (2x-5) + (2x-5) \cdot [2x-5]' = 2 \cdot (2x-5) + (2x-5) \cdot 2 = 4(2x-5)$
 c $h(x) = (x^2-3x)(x^3+x^2+x)$ geeft
 $h'(x) = [x^2-3x]' \cdot (x^3+x^2+x) + (x^2-3x) \cdot [x^3+x^2+x]'$
 $= (2x-3)(x^3+x^2+x) + (x^2-3x)(3x^2+2x+1)$

$$\begin{aligned} \text{d } j(x) &= (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 - 4) \text{ geeft} \\ j'(x) &= [3x^2 - 4]' \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot [3x^2 - 4]' \\ &= 6x(3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot 6x = 12x(3x^2 - 4) \end{aligned}$$

Bladzijde 82

61 a $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$  Neem van het linker- en het rechterlid de afgeleide.

$$[\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}]' = [x]'$$

$$[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$$

$$2\sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$$

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ : } 2\sqrt{x}$$

Dus $f(x) = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x-1} = 2x-1$

$$[\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x-1}]' = [2x-1]'$$

$$[\sqrt{2x-1}]' \cdot \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-1} \cdot [\sqrt{2x-1}]' = 2$$

$$2\sqrt{2x-1} \cdot [\sqrt{2x-1}]' = 2$$

$$[\sqrt{2x-1}]' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

Dus $g(x) = \sqrt{2x-1}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

$$\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^2-x} = x^2-x$$

$$[\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^2-x}]' = [x^2-x]'$$

$$[\sqrt{x^2-x}]' \cdot \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2-x} \cdot [\sqrt{x^2-x}]' = 2x-1$$

$$2\sqrt{x^2-x} \cdot [\sqrt{x^2-x}]' = 2x-1$$

$$[\sqrt{x^2-x}]' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Dus $h(x) = \sqrt{x^2-x}$ geeft $h'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

62 a $p = fgh = fg \cdot h = fh$ geeft $p' = j'h + jh'$
 $j = fg$ geeft $j' = f'g + fg'$
 Dus $p' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b $p = fghj$ geeft $p' = [fgh]' \cdot j + fgh \cdot [j]'$
 $= (f'gh + fg'h + fgh') \cdot j + fgh \cdot j'$
 $= f'ghj + fg'hj + fgh'j + fghj'$

63 a $q(x) \cdot n(x) = t(x)$
 Differentiëren van beide leden geeft $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$.

b $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$
 $q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$

$$q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$$

c Invullen van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ in $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \frac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)}$.

Teller en noemer vermenigvuldigen met $n(x)$ geeft $q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Bladzijde 84

- 64 a** $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+5) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$
- b** $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$
- c** $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x^2+1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4+3x^2-4x^4}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^4+3x^2}{(2x^2+1)^2}$
- d** $f(x) = \frac{x-2}{3-x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{(3-x^2) \cdot 1 - (x-2) \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{3-x^2+2x^2-4x}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(3-x^2)^2}$
- e** $f(x) = \frac{3-x^2}{x-2} + x^3$ geeft
 $f'(x) = \frac{(x-2) \cdot (-2x) - (3-x^2) \cdot 1}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-2x^2+4x-3+x^2}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2} + 3x^2$
- f** $f(x) = x - \frac{2}{x+4}$ geeft $f'(x) = 1 - \frac{(x+4) \cdot 0 - 2 \cdot 1}{(x+4)^2} = 1 - \frac{-2}{(x+4)^2} = 1 + \frac{2}{(x+4)^2}$

- 65 a** $f(x) = x^2 - 3x - 1$ geeft $f'(x) = 2x - 3$
 $f'(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$
 $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3$
- b** $y_A = f(4)$
- c** De helling in A is $f'(4)$.

Bladzijde 85

- 66 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 2 \\ 32 + b = 2 \\ b = -30 \end{array}$$

 Dus $k: y = 8x - 30$.
- b** Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 14$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 14x + b \\ f(-2) = -10, \text{ dus } B(-2, -10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 14 \cdot (-2) + b = -10 \\ -28 + b = -10 \\ b = 18 \end{array}$$

 Dus $m: y = 14x + 18$.
- 67 a** $g(x) = 2x^2 - 6x$ geeft $g'(x) = 4x - 6$
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = g'(-3) = 4 \cdot (-3) - 6 = -18$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -18x + b \\ g(-3) = 36, \text{ dus } A(-3, 36) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -18 \cdot (-3) + b = 36 \\ 54 + b = 36 \\ b = -18 \end{array}$$

 Dus $l: y = -18x - 18$.
- b** $g(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$
 $2x(x-3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$
 Dus $P(3, 0)$.
 Stel $n: y = ax + b$ met $a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x + b \\ P(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \cdot 3 + b = 0 \\ b = -18 \end{array}$$

 Dus $n: y = 6x - 18$.

68 a $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x + 5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) + 8}{(2 \cdot (-2) + 5)^2} = -4$.

$y = -4x + b$
 $A(-2, 0) \quad \left. \begin{array}{l} -4 \cdot (-2) + b = 0 \\ b = -8 \end{array} \right\}$

Dus $k: y = -4x - 8$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 8}{(2 \cdot 2 + 5)^2} = \frac{4}{9}$.

$y = \frac{4}{9}x + b$
 $B(2, 0) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{4}{9} \cdot 2 + b = 0 \\ b = -\frac{8}{9} \end{array} \right\}$

Dus $l: y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}$.

b Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{8}{25}$.

$y = \frac{8}{25}x + b$
 $f(0) = -\frac{4}{5}$, dus $C(0, -\frac{4}{5}) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{8}{25} \cdot 0 + b = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{4}{5} \end{array} \right\}$ dus $m: y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}$.

69 $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 4}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 - 4) \cdot 2 - (2x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 10x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$.

$y = -\frac{1}{2}x + b$
 $f(0) = 1\frac{1}{4}$, dus $A(0, 1\frac{1}{4}) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 0 + b = 1\frac{1}{4} \\ b = 1\frac{1}{4} \end{array} \right\}$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}$.

$y_B = 0$ geeft $\frac{2x - 5}{x^2 - 4} = 0$
 $2x - 5 = 0$
 $2x = 5$
 $x = 2\frac{1}{2}$

$k: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}$
 $B(2\frac{1}{2}, 0) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0 \text{ klopt.} \end{array} \right\}$

Dus B ligt op lijn k , dus de bewering is waar.

Bladzijde 86

70 a $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 4 = 17$.

$y = 17x + b$
 $f(-3) = -10$, dus $A(-3, -10) \quad \left. \begin{array}{l} 17 \cdot (-3) + b = -10 \\ -51 + b = -10 \\ b = 41 \end{array} \right\}$

Dus $k: y = 17x + 41$.

b Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = -4$.

$y = -4x + b$
 $f(0) = -4$, dus $B(0, -4) \quad \left. \begin{array}{l} -4 \cdot 0 + b = -4 \\ b = -4 \end{array} \right\}$

Dus $l: y = -4x - 4$.

c $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \vee x + 1 = 0$

$x^2 = 4 \vee x = -1$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$

Dus $C(2, 0)$.

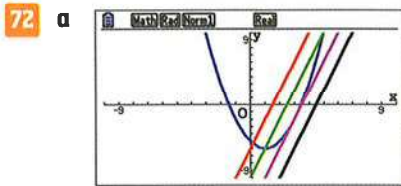
Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 12$.

$y = 12x + b$
 $C(2, 0) \quad \left. \begin{array}{l} 12 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -24 \end{array} \right\}$

Dus $m: y = 12x - 24$.

71 $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2$
 Stel $k: y = mx + n$ met $m = f'(a) = 3 \cdot a^2 + 2a \cdot a + a^2 = 6a^2$.
 $y = 6a^2x + n$
 $f(a) = 3a^3$, dus $A(a, 3a^3)$ $\left\{ \begin{array}{l} 6a^2 \cdot a + n = 3a^3 \\ 6a^3 + n = 3a^3 \\ n = -3a^3 \end{array} \right.$

Dus $k: y = 6a^2x - 3a^3$.



b De lijn $y = 4x - 14$ raakt de grafiek van f .

c Er geldt $f'(x_R) = 4$.

Bladzijde 87

73 a $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 2$
 $f'(x) = 4$ geeft $-2x + 2 = 4$
 $-2x = 2$
 $x = -1$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 0$, dus $A(-1, 0)$.

b $k \parallel l$, dus $f'(x_B) = rc_k = rc_l = -6$.
 $f'(x) = -6$ geeft $-2x + 2 = -6$
 $-2x = -8$
 $x = 4$

$x_B = 4$ en $y_B = f(4) = -5$, dus $B(4, -5)$.

74 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 10$
 $f'(x) = 2$ geeft $x^2 + x - 10 = 2$
 $x^2 + x - 12 = 0$
 $(x - 3)(x + 4) = 0$
 $x = 3 \vee x = -4$

$x_A = -4$ en $y_A = f(-4) = 32\frac{2}{3}$, dus $A(-4, 32\frac{2}{3})$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = -10\frac{1}{2}$, dus $B(3, -10\frac{1}{2})$.

b Raaklijn is evenwijdig met k , dus $f'(x_C) = f'(x_D) = rc_k = 10$.
 $f'(x) = 10$ geeft $x^2 + x - 10 = 10$
 $x^2 + x - 20 = 0$
 $(x - 4)(x + 5) = 0$
 $x = 4 \vee x = -5$

Dus $x_C = -5$ en $x_D = 4$.

75 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$.

$y = 8x + b$
 $f(4) = 4\frac{1}{3}$, dus $P(4, 4\frac{1}{3})$ $\left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 4\frac{1}{3} \\ 32 + b = 4\frac{1}{3} \\ b = -27\frac{2}{3} \end{array} \right.$

Dus $k: y = 8x - 27\frac{2}{3}$.

b $f'(x) = 3$ geeft $x^2 - 2x = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

$x_Q = -1$ en $y_Q = f(-1) = -2\frac{1}{3}$, dus $Q(-1, -2\frac{1}{3})$.

$x_R = 3$ en $y_R = f(3) = -1$, dus $R(3, -1)$.

76 $f_p'(x) = x^3 + px^2 + 2x - 3$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px + 2$
 $f_p'(x) = -1$ geeft $3x^2 + 2px + 2 = -1$
 $3x^2 + 2px + 3 = 0$

Twee raaklijnen betekent twee oplossingen, dus $D > 0$.
 $D = (2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4p^2 - 36$

$$\left. \begin{aligned} 4p^2 - 36 &> 0 \\ 4p^2 &> 36 \\ p^2 &> 9 \\ p &< -3 \vee p > 3 \end{aligned} \right\}$$

Bladzijde 88

77 a $s = 0,8t^2$ geeft $v = 1,6t$
 $t = 3$ geeft $v = 1,6 \cdot 3 = 4,8$, dus na 3 seconden is de snelheid 4,8 m/s.
 $t = 6$ geeft $v = 1,6 \cdot 6 = 9,6$, dus na 6 seconden is de snelheid 9,6 m/s.

b $30 \text{ km/uur} = \frac{30}{3,6} \text{ m/s}$
 $1,6t = \frac{30}{3,6}$ geeft $t = \frac{30}{3,6 \cdot 1,6} \approx 5,21$

Dus na 5,21 seconden is de snelheid 30 km/uur.

c $t = 6$ geeft $s = 0,8 \cdot 6^2 = 28,8$
 Op $t = 6$ is $v = 9,6$ (zie a).
 De auto legt in de eerste tien seconden $28,8 + (10 - 6) \cdot 9,6 = 67,2$ meter af.

78 a De vergelijking $h = 0$ moet worden opgelost.
 Voer in $y_1 = -5x^2 + 28x + 0,6$.
 De optie nulpunt geeft $x = 5,62...$
 Dus het duurt 5,6 seconden voordat de bal op de grond komt.

b $h = -5t^2 + 28t + 0,6$ geeft $v = -10t + 28$
 $t = 5,62...$ geeft $v = -10 \cdot 5,62... + 28 = -28,21...$
 De snelheid waarmee de bal op de grond komt is $28,21... \cdot 3,6... \approx 102 \text{ km/uur}$.

c Als de bal het hoogste punt heeft bereikt, is de snelheid nul.
 $v = 0$ geeft $-10t + 28 = 0$
 $-10t = -28$
 $t = 2,8$
 Dat is na 2,8 seconden het geval.

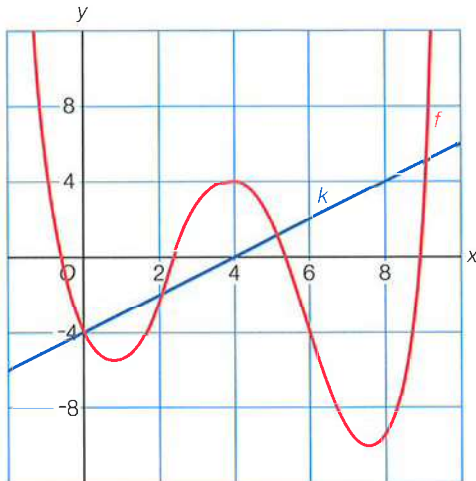
Diagnostische toets**Bladzijde 92**

1 a Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 1, 2\frac{1}{2} \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 2\frac{1}{2}, 4 \rangle$
 Toenemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 6, 7\frac{1}{2} \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 7\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

b Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - -5\frac{1}{2}}{4 - 1} = \frac{9\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{6}$.

c Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - -2}{6 - 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

- d Teken de lijn k door $(0, -4)$ met $rc_k = 1$.



k snijdt de grafiek rechts van $(0, -4)$ in drie punten.

Dus er zijn drie waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk is aan 1.

2 a Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - 2\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{2}$.

b Op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = -1\frac{1}{2}$.

c Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{-1\frac{1}{2} - (-4)}{5} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + b \\ f(-2) &= -4, \text{ dus } A(-2, -4) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot -2 + b = -4 \\ -1 + b = -4 \\ b = -3 \end{array} \right.$$

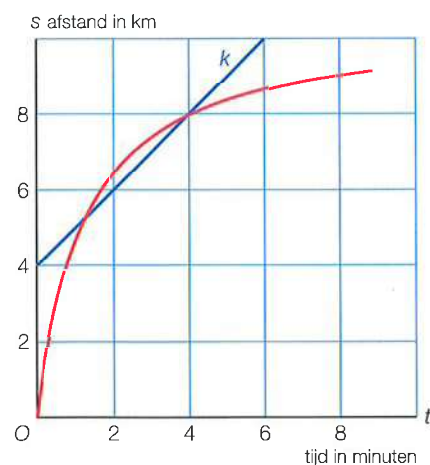
Dus $l: y = \frac{1}{2}x - 3$.

3 a Op $[1, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9 - 5}{9 - 1} = \frac{4}{8} = 0,5$ km/minuut.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 30 km/uur.

b Op $[0, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9 - 0}{9 - 0} = 1$ km/minuut.

Teken door het punt $(1, 5)$ van de grafiek de lijn k met $rc_k = 1$.



k snijdt de grafiek rechts van $(1, 5)$ in het punt $(4, 8)$.

Dus voor $p = 4$.

c Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 - \frac{10}{1,01 + 1} - \left(10 - \frac{10}{1 + 1}\right)}{0,01} = 2,48... \text{ km/minuut.}$

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering $60 \cdot 2,48... \approx 149$ km/uur.

4 Voer in $y_1 = \sqrt{10 - x^2}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-3} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ f(-3) = 1, \text{ dus } A(-3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot -3 + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x + 10$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(3) = 1, \text{ dus } B(3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x + 10$.

Het snijpunt van k en l is $S(0, 10)$.

5 a Voer in $y_1 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2$.

$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 9$, dus op $t = 2$ is de snelheid 9 m/s

b $t = 6$ geeft $s = -\frac{1}{4} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 54$

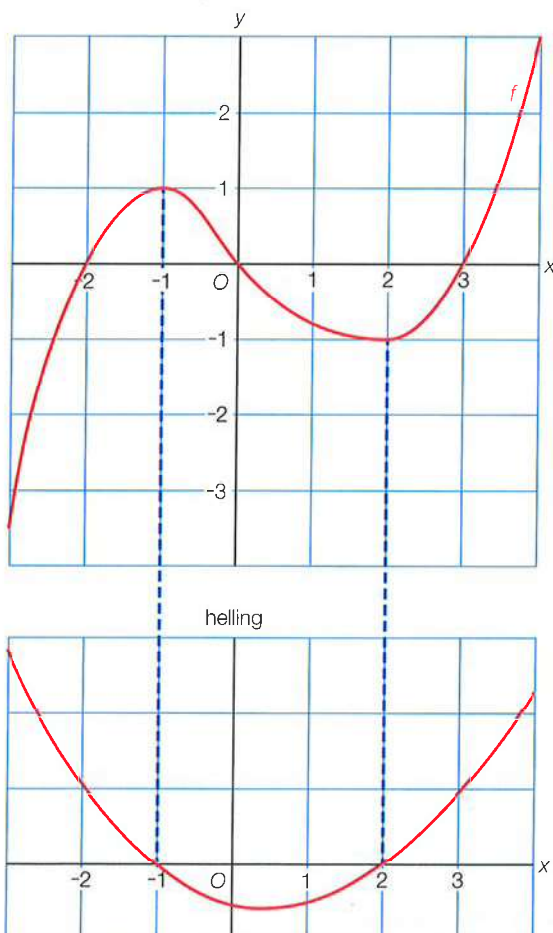
$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=6} = 9$

Tussen $t = 6$ en $t = 10$ wordt $4 \cdot 9 = 36$ meter afgelegd.

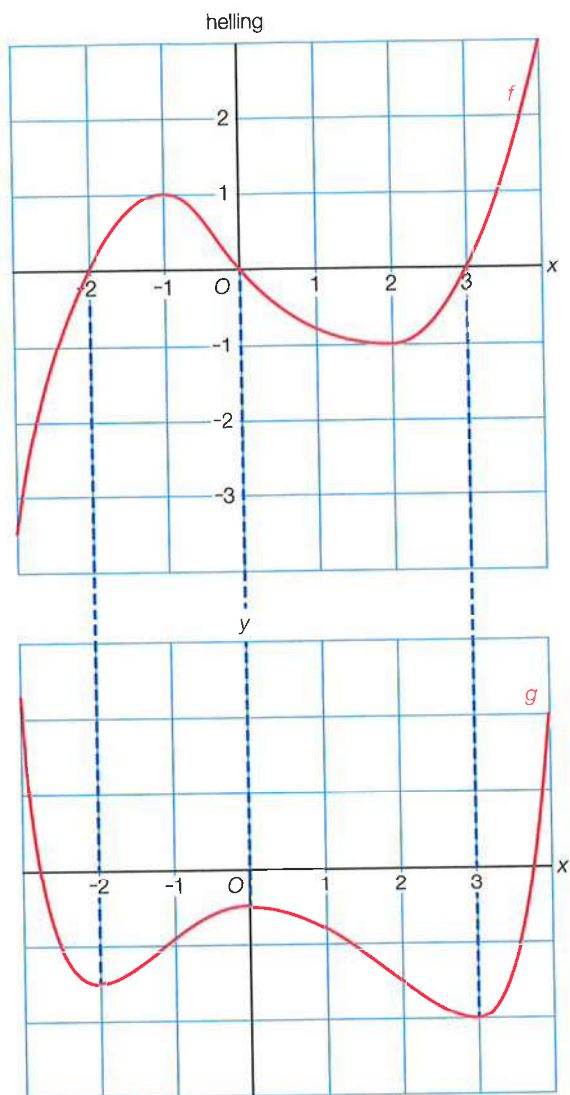
Dus na tien seconden heeft de auto $54 + 36 = 90$ meter afgelegd.

Bladzijde 93

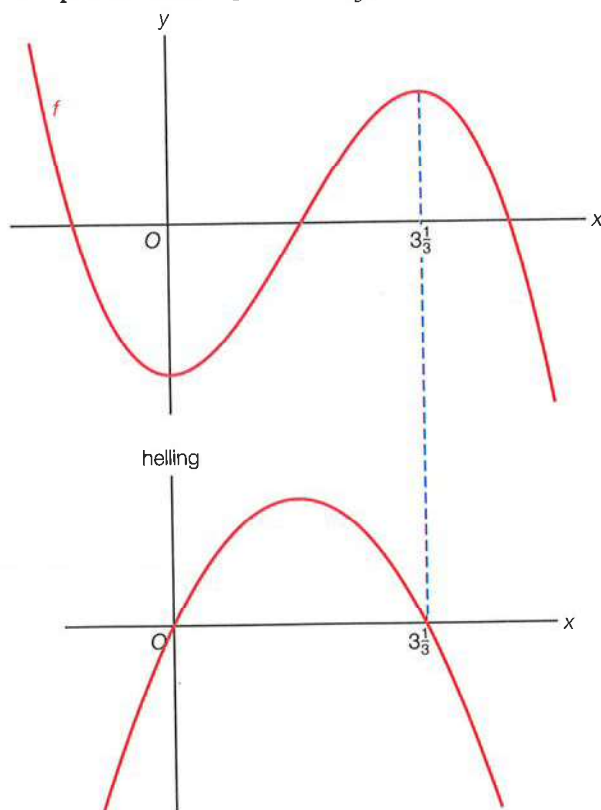
6 a



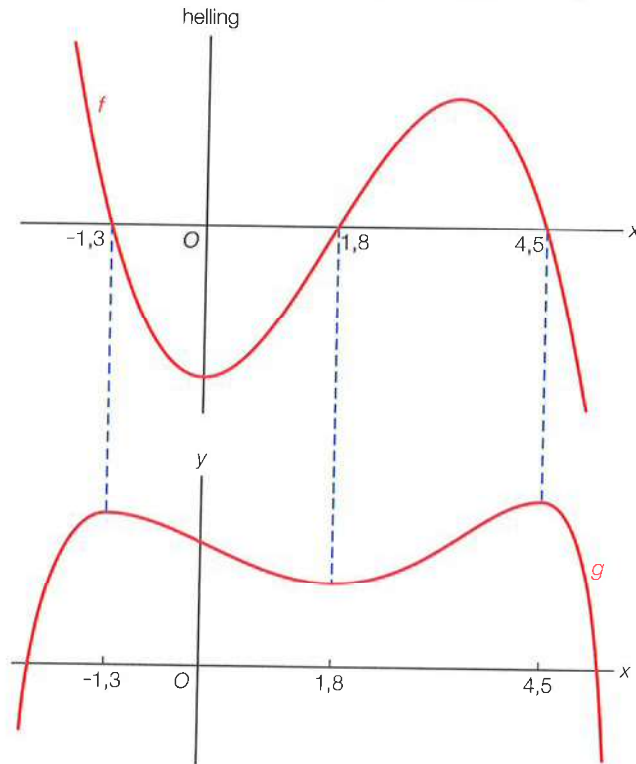
b



- 7 a** Voer in $y_1 = -0,2x^3 + x^2 - 2$.
 De optie minimum geeft $x = 0$.
 De optie maximum geeft $x = 3\frac{1}{3}$.



- b** De optie nulpunt geeft $x \approx -1,3$, $x \approx 1,8$ en $x \approx 4,5$.



$$\begin{aligned} \text{8 a } f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(3+h)^2 + 4 - (5 \cdot 3^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) + 4 - 49}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{45 + 30h + 5h^2 + 4 - 49}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30h + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(30 + 5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (30 + 5h) = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)^2 + 4 - (5x^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) + 4 - 5x^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4 - 5x^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10x + 5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) = 10x \end{aligned}$$

- 9 a** $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 7$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
b $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$ geeft $g'(p) = 12p^2 + 2p - 11$
c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - 4) + 6 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 6 = 2\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 6$ geeft $k'(x) = 7x^2 - 16x$

- 10** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3px + 1$ geeft $f'(x) = x + 3p$
 De helling in A is $f'(x_A) = f'(2) = 2 + 3p$.
 Dus $2 + 3p = p$
 $2p = -2$
 $p = -1$

- 11 a** $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 7x + 2)$ geeft
 $f'(x) = [x^3 - 1]' \cdot (x^2 + 7x + 2) + (x^3 - 1) \cdot [x^2 + 7x + 2]' = 3x^2(x^2 + 7x + 2) + (x^3 - 1)(2x + 7)$
b $g(x) = (x^3 + 2x + 1)^2 = (x^3 + 2x + 1)(x^3 + 2x + 1)$ geeft
 $g'(x) = [x^3 + 2x + 1]' \cdot (x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x + 1) \cdot [x^3 + 2x + 1]'$
 $= (3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x + 1)(3x^2 + 2) = 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)$

12 a $f(x) = \frac{2x-3}{3x-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(3x-1) \cdot 2 - (2x-3) \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{6x-2-6x+9}{(3x-1)^2} = \frac{7}{(3x-1)^2}$

b $g(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ geeft $g'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^5+4x^3-2x^5}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5+4x^3}{(x^2+1)^2}$

c $h(x) = x^2 - \frac{3}{x+1}$ geeft $h'(x) = 2x - \frac{(x+1) \cdot 0 - 3 \cdot 1}{(x+1)^2} = 2x - \frac{-3}{(x+1)^2} = 2x + \frac{3}{(x+1)^2}$

13 a $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + 4 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(2) = 9\frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, 9\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 9\frac{2}{3} \\ 8 + b = 9\frac{2}{3} \\ b = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + 1\frac{2}{3}$.

b Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = 0 + 0 + 4 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(0) = 1, \text{ dus door } (0, 1) \end{array} \right\} b = 1$$

Dus $l: y = 4x + 1$.

14 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 1$

Raaklijn evenwijdig met k , dus $f'(x_A) = f'(x_B) = \text{rc}_k = 2$.

$f'(x) = 2$ geeft $x^2 - 2x - 1 = 2$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 1\frac{2}{3}$, dus $A(-1, 1\frac{2}{3})$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = -1$, dus $B(3, -1)$.